Publications of the Institute of Geophysics, Polish Academy of Sciences
Geophysical Data Bases, Processing and Instrumentation
vol. 425 (M-32), 2019, pp. 51-54
DOI: 10.25171/InstGeoph_PAS_Publs-2019-010
"Electromagnetic ULF/ELF Fields on Earth and in Space" Conference, Warsaw, Poland, 2019

A Few Glances on Fractional Calculus from the Geophysical-ELF Point of View

Piotr KOPERSKI[1,✉]

[1]Association Astronomia Nova, Poland

✉ pkopersk@wit.edu.pl

1. INTRODUCTION

Since about the last 30 years one can notice an increasing interest in the so called "calculus of fractional order" (also known under different names, as e.g. "fractional calculus" or "fractional differ-integrals"). Using the opportunity of an open formula of this meeting, I would like to bring this topic a bit closer and to present some ideas potentially applicable in the domain of our interest. Because the topic is extensive, this presentation is a brief introduction, accompanied with a few examples and bibliography.

The topic is not new. In the oral presentation, I will remind of a few "milestones" set by great scientists. Here is the one: in the letter to Leibniz from 1695, L'Hospital asked him about its notation $d^n f(x)/dx^n$: what it would mean, if $n = 1/2$? Leibniz responded that it is an apparent paradox, from which one day useful consequences will be drawn.

As a friendly introduction, let us take a look at the *n*-th order derivative of a function *f*(*t*) defined over a range: $a \le t \le x$. It can be written as:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{[(x-a)/h]} (-1)^k \binom{n}{k} f(x-kh) \tag{1}$$

where: $a \le x, n, k, p \ge 0$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ is Newton symbol, $[x]$ is integer part of x and the property: $\binom{p}{q} = 0$ for $q > p$ is used (all necessary details will be discussed in the presentation).

Playing with some algebra (e.g. Podlubny 1999) one can show that the *n*-th order integral $(n > 0)$ of *f*(*t*) in the range $a \le t \le x$ can be expressed in a very similar way:

$$I^n f(x) \equiv \int dt_1 \ldots \int dt_n f(t_n) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{-n}} \sum_{k=0}^{[(x-a)/h]} (-1)^k \binom{-n}{k} f(x-kh) \tag{2}$$

Looking this way, one has array of similar operators labeled (and defined) with the natural n, comprising both integration (for $n < 0$) and differentiation (for $n > 0$) – therefore the term "differ-integrals":

$$\dots D^{-n} \equiv I^n, \dots D^{-1} \equiv I^1, D^0 \equiv \text{Identity}, D^1, \dots D^n, \dots$$

One of possible ways of looking at „what it means the integration or differentiation of fractional order" is to observe, that the definitions above can be extended (made continuous) using the Euler Gamma function, $\Gamma(n)$, as $n! = \Gamma(n+1)$. Indeed, as another „historical milestone" can be regarded the approach of L. Euler (1730), who applied similar idea in a specific case of $f(x) = x$ and $n = 1/2$ to get:

$$\frac{d^{1/2}x}{dx^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{1/2} \tag{3}$$

Of special importance is that the above formulas are principally nonlocal – even derivative (Eq. 2) require function *f*() to be considered over an interval. This is the generic feature of „fractional calculus". This should not be very surprising, as e.g. the well known „Cauchy integral formula" expresses („normal") derivatives by integral – for sufficiently regular functions on complex plane:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt \tag{4}$$

The difference, for a non integer value α, is that a branch cut appears instead of a pole. To highlight the nonlocality, fractional operators are named using upper- and lower boudaries (respectively a and x) like this: ${}_aD^{\alpha}{}_x\, f(x)$

There is no unique definition of a fractional order derivative or integral, and several approaches can be distinguished. This can be seen as a weakness but it reflects a deep nature of that idea and is also encouraging for new research. Three most popular definitions will be shortly described in oral presentation.

2. DEFINITIONS AND DETAILS

As a few notes and clarifications will be needed, I will start recalling necessary properties of the Newton symbol, Euler Gamma and other mathematic stuff.

In the rest of this Section I will present definitions, list some properties – and compare three most popular types of „fractionals" – those of:

- Grünwald-Letnikov,
- Riemann-Liouville,
- Caputo.

3. TRAPS, DIFFICULTIES AND REWARDS

Using a few examples I will point out (some) traps and difficulties usually met with „differ-integrals", as:

- what happens with a constant and monomial,
- why exponential function is not comfortable choice,
- what about Leibniz rule.

Fortunately, there is also a set of rewards here, some of which will also be listed. Two worth mention at this point are:

- two useful, universal kinds of special functions (Mittag-Leffler and Wright),
- profits when dealing with the power-law dependencies, especially in the domain of Fourier/Laplace transforms.

4. SOME EXAMPLES AND INTERPRETATIONS

Physical interpretations of „fractional calculus" is still under development, though there exist already some important achievements. The same is with discovering connections to several domains of science and applications. I will try to review some of such connections, interpretations and applications in parallel to a few examples. In this context, I will briefly talk about a few known applications, as:

- differential equations of a wave- and diffusion type,
- spectral analysis,
- some connection to fractals and stochasticity.

5. POSSIBLE APPLICATIONS TO GEOPHYSICAL ELF INVESTIGATIONS

Some ideas of „fractional calculus" will be discussed here in the context of the geophysical ELF. To the authors knowledge, there is only a very few contemporary works touching this domain, rather in a mathematical way. A few selected physical and mathematical aspects will be presented in a hope to create a starting point to improve spectral fitting and interpretation of results.

References

In this extended abstract I can only sketch the content so I refer only to one source. More general- and specific bibliography will be put in oral presentation and in its printed version in the workshop communications.

Podlubny, I. (1999), *Fractional Differential Equations*, Ser. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 198, Academic Press, San Diego.

KILKA SPOJRZEŃ NA RACHUNEK FRAKCJALNY Z PUNKTU WIDZENIA GEOFIZYCZNYCH BADAŃ ELF

Streszczenie

W ciągu ostatnich około 30 lat daję się zauważyć rosnące zainteresowanie tzw. "rachunkiem różniczkowo-całkowym rzędu ułamkowego" (znanym też pod nieco innymi nazwami). Korzystając z otwartej formuły niniejszego spotkania, chciałbym przybliżyć nieco ten temat oraz przedstawić kilka własnych pomysłów potencjalnie interesujących w naszej dziedzinie. Ponieważ zagadnienie jest obszerne, w czasie wystąpienia zaprezentuję ogólne wprowadzenie wraz z kilkoma znanymi przykładami i podstawowa bibliografią.

Zagadnienie nie jest nowe i w wystąpieniu wspomnę o kilku “kamieniach milowych” ustanowionych przez wielkich uczonych. Jako pierwszy można wymienić list L’Hospitala do Leibniza z 1695 roku, dotyczący notacji $d^n f(x)/dx^n$, w którym pyta on, jakie byłoby jej znaczenie w przypadku $n = 1/2$? Leibniz odpowiedział, że jest to wyraźny paradoks, z którego pewnego dnia zostaną wyciągnięte użyteczne wnioski.

Nie istnieje jedna obowiązująca definicja całki - bądź pochodnej rzędu ułamkowego. Może to być postrzegane jako słabość, ale jest odzwierciedleniem złożoności zagadnienia i zachęca do dalszych badań. W trakcie wystąpienia przedstawię najczęściej spotykane podejścia wraz ze znanymi przykładami i podstawową interpretacją. Na początku przypomnę kilku niezbędnych pojęć i spróbuję wyjaśnić kilka oczywistych wątpliwości. Jedną z nich może być nielokalność, będąca zasadniczą cechą „operatorów frakcjalnych”: nawet pochodna funkcji jest rozpatrywana (i wyrażana) w formie całki po makroskopowym zakresie argumentu (równanie (1)). Nie powinno to jednak bardzo dziwić, skoro np. znany „wzór całkowy Cauchy’ego” też wyraża pochodną jako całkę po konturze (w płaszczyźnie zespolonej, dla odpowiednio regularnej funkcji). Następnie przedstawię i krótko porównam trzy definicje „frakcjalnych całko-pochodnych”: Grünwalda-Letnikova, Riemann’a-Liouville’a oraz Caputo.

W oparciu o kilka prostych przykładów zwrócę uwagę na kilka trudności i pułapek, typowych w zetknięciu z „operatorami frakcjalnymi”, takich jak : co dzieje się ze stałą i z funkcja potęgową; dlaczego funkcja wykładnicza nie jest wygodna; co z regułą Leibniza? Pojawi się też zestaw nagród, z których wspomnę dwie: wygodne, uniwersalne klasy funkcji specjalnych (Mittag-Leffler’a i Wright’a) oraz wygoda w pracy z zależnościami typu potęgowego, zwłaszcza w dziedzinie transformacji Fouriera/Laplace’a.

Interpretacja „rachunku frakcjalnego” jest nadal w fazie rozwoju, choć dokonano kilku ważnych osiągnięć. To samo dotyczy związków z innymi dziedzinami badań i aplikacji. Przedstawię kilka zastosowań i interpretacji w oparciu o znane przykłady, m. in: równania różniczkowe typu dyfuzji i falowego; analizę widmową; związki z fraktalami i losowością.

Na koniec, kilka pojęć z „rachunku frakcjalnego” zostanie przedstawionych w kontekście geofizyki i ELF. Według wiedzy autora jest zaledwie kilka współczesnych prac dotykających tej dziedziny, zresztą głównie od strony matematycznej. Kilka wybranych aspektów fizycznych i matematycznych zostanie zaprezentowane z nadzieją, że posłużą jako punkt wyjścia dla poprawy dopasowania widmowego i interpretacji wyników obserwacji.